

Additivité de la loi normale

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

La loi normale est *stable* sous plusieurs types d'opérations.

Par exemple, on sait déjà que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, alors

$$aX + b \sim \mathcal{N}(\mu + b, a^2\sigma^2).$$

L'objectif de cette capsule vidéo est de vérifier que la loi normale possède la *propriété d'additivité*:

la somme de variables aléatoires indépendantes et suivant des lois normales suit elle aussi une loi normale.

Théorème

Additivité de la loi normale

Pour $n \geq 1$, considérons des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n suivant des lois normales:

$$X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2),$$

pour chaque $i = 1, 2, \dots, n$. Si ces variables aléatoires sont indépendantes, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right).$$

Rappel

Avant de commencer la preuve, rappelons que la loi normale est caractérisée par sa fonction génératrice des moments (FGM).

Caractérisation de la loi normale

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si et seulement si

$$\lambda \mapsto \mathbb{E} [e^{\lambda X}] = e^{\lambda\mu + \lambda^2 \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

La preuve du théorème que nous sommes sur le point de présenter est basée sur cette propriété.

Preuve basée sur la FGM

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et calculons

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \right] =$$

Résumé

- Propriété d'additivité de la loi normale
- Preuve basée sur la FGM

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

