Transformation d'un couple de variables aléatoires

Exemple 2

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Considérons X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On a donc

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) =$$

L'objectif de cette capsule vidéo est de déterminer la loi de la variable aléatoire

$$V = \frac{X}{Y}.$$

Transformations

Posons $U = X$ et trouvons la loi du couple $(U, V) = (X, X/Y)$.

La transformation inverse étant donnée par

$$(x(u, v), y(u, v)) = (u, u/v),$$

sa matrice jacobienne et son jacobien sont:

Loi conjointe de U et V

On en déduit donc que:

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \left|\det J(u, v)\right|$$

Loi marginale de V

Il suffit maintenant d'extraire la fonction de densité marginale de $V = X/Y$:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v)\mathrm{d}u$$

Résumé

Si X et Y sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors X/Y est distribuée selon une loi de Cauchy centrée.

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Mathéma-TIC

Mathéma-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Mathéma-TIC

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Mathéma-TIC

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC