

Transformation d'un couple de variables aléatoires

Exemple 1

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Considérons X et Y deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

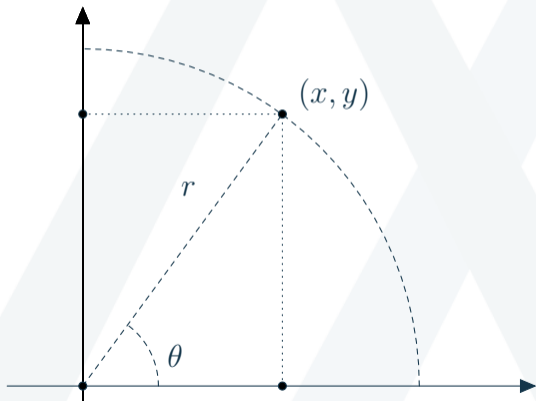
Chaque réalisation du couple (X, Y) est donc un point du plan.

Et le *choix* de ces coordonnées se fait de façon indépendante.

Mais qu'arrive-t-il si l'on passe en coordonnées polaires?

Coordonnées polaires

Chaque point (x, y) du plan peut être représenté par un rayon $r \geq 0$ et un angle $\theta \in [0, 2\pi)$:



Coordonnées polaires

Définissons le couple de variables aléatoires (R, Θ) par

$$\begin{cases} R &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \Theta &= \arctan(Y/X). \end{cases}$$

Comme la transformation est inversible, on peut aussi écrire:

$$\begin{cases} X &= R \cos(\Theta) \\ Y &= R \sin(\Theta). \end{cases}$$

Transformation inverse

La transformation inverse étant donnée par

$$(x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta)),$$

sa matrice jacobienne et son jacobien sont:

Loi conjointe du rayon et de l'angle

On en déduit donc que:

$$f_{R,\Theta}(r, \theta) = f_{X,Y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) |\det J(r, \theta)| \mathbb{1}_{(0,\infty)}(r) \mathbb{1}_{(0,2\pi)}(\theta)$$

Résumé

Si X et Y sont i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad \Theta = \arctan(Y/X)$$

sont indépendantes, respectivement de loi de Rayleigh et de loi uniforme sur $(0, 2\pi)$.

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique
Christine Blais

Production des modèles en LaTeX
Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca