Permutations d'objets partiellement distinguables

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Rappelons que certains outils d'analyse combinatoire sont très utiles lorsque vient le temps de calculer des probabilités dans un modèle de cardinalité finie.

Cette capsule vidéo porte sur les permutations d'objets partiellement distinguables.

Rappelons qu'une permutation est un arrangement (ordonné) d'objets.

Nous allons répondre à la question suivante:

> *Quel est le nombre de permutations (différentes) que l'on peut créer avec n objets qui ne sont que partiellement distinguables?*

Permutations d'objets partiellement distinguables

Par exemple, combien y a-t-il d’arrangements des lettres

$$M \quad A \quad M \quad A \quad N$$

On va numéroter nos objets:

$$M_1 \quad A_1 \quad M_2 \quad A_2 \quad N$$

On sait qu’il existe $5!$ permutations de ces 5 objets distincts.

Par exemple, il y a

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & N & M_2 & A_2 & A_1 \\ M_2 & N & M_1 & A_2 & A_1 \\ M_2 & N & M_1 & A_1 & A_2 \end{array}$$

Nombre de permutations

Pour une permutation donnée, M_1 est placé devant M_2 ou le contraire:

$$\begin{array}{ccccc} M_1 & N & M_2 & A_2 & A_1 \\ M_2 & N & M_1 & A_2 & A_1 \end{array}$$

Donc, pour la moitié des $5!$ permutations, M_1 est placé devant M_2, et pour l'autre moitié, c'est le contraire.

On peut donc créer $5!/2!$ arrangements différents à partir des objets

$$M \quad A_1 \quad M \quad A_2 \quad N$$

C'est la même chose pour les A: pour la moitié des $5!/2!$ permutations, A_1 est placé devant A_2, et pour l'autre moitié, c'est le contraire.

En conclusion, il y a $\dfrac{5!}{2! \cdot 2!}$ arrangements des lettres

$$M \quad A \quad M \quad A \quad N$$

Résultat général

Permutation d'objets partiellement distinguables

Le nombre de permutations de n objets, parmi lesquels il y a $1 \leq r \leq n$ sous-groupes de tailles respectives $n_1, n_2, \ldots, n_r$ et dont les éléments sont identiques entre eux, est

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} := \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ \ldots \ n_r!}.$$

Deux cas particuliers

Si les n objets sont distincts, alors $r = n$ et $n_1 = n_2 = \cdots = n_r = 1$, et donc il y a

$$\binom{n}{1, 1, \ldots, 1} = \frac{n!}{1!\,1!\,\ldots\,1!} = n!$$

permutations.

Si les n objets se divisent en deux groupes de tailles respectives k et $n - k$, alors $r = 2$ et il y a

$$\binom{n}{k} := \binom{n}{k, n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

permutations.

Résumé

- Nombre de permutations de n objets partiellement distinguables
- Deux cas particuliers

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

MathéMa-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Mathéma-TIC

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC