

Loi uniforme sur un rectangle

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

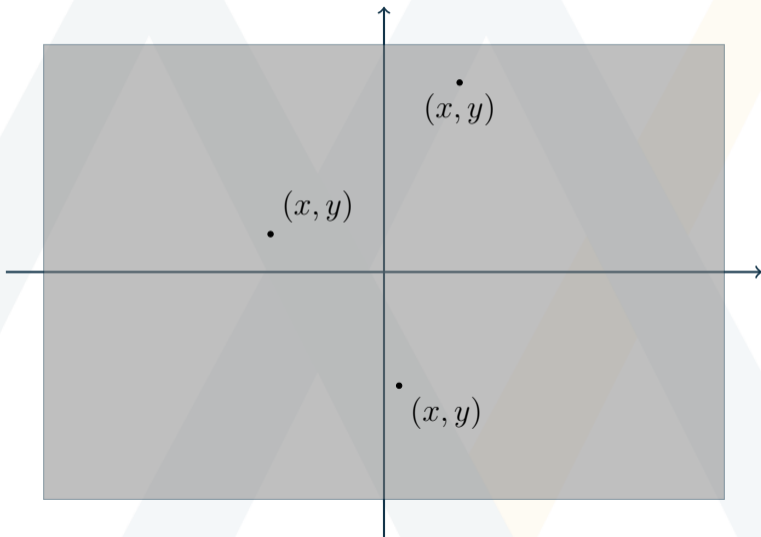
Considérons (X, Y) un couple de variables aléatoires uniformément réparties sur le rectangle $(a, b) \times (c, d)$.

Chaque réalisation de (X, Y) représente les coordonnées cartésiennes d'un point dans ce rectangle.

Est-ce que le *choix* des coordonnées se fait de façon indépendante?

Nous verrons également des exemples de calculs faisant intervenir cette loi de probabilité.

Loi uniforme sur un rectangle



Loi uniforme sur un rectangle

La fonction de densité conjointe est donc

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{si } (x, y) \in (a, b) \times (c, d), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut aussi écrire

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{(b-a)(d-c)} \mathbb{1}_{(a,b) \times (c,d)}(x, y)$$

Indépendance et lois marginales

Puisque $f_{X,Y}(x, y) = g(x) h(y)$, on a l'indépendance entre X et Y .

En effet, on vérifie facilement que

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

et

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

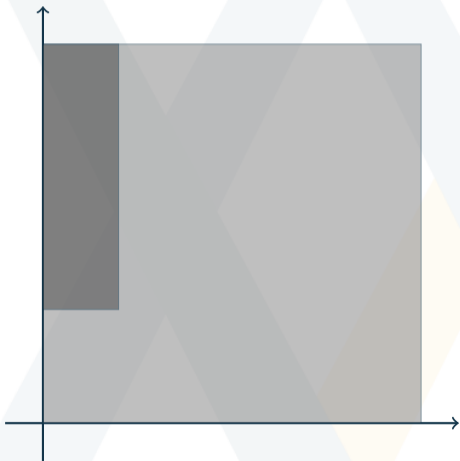
Exemple 1

Supposons que $(X, Y) \sim \text{unif}((0, 10) \times (0, 10))$ et que l'on veuille calculer

$$\mathbb{P}(X \leq 2, Y > 3)$$

Exemple 1

Sinon, on peut représenter $\{X \leq 2, Y > 3\}$ graphiquement.



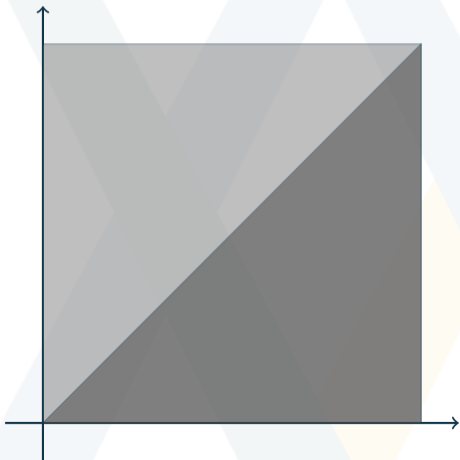
Exemple 2

Supposons maintenant que l'on veuille calculer

$$\mathbb{P}(X \leq Y)$$

Exemple 2

Sinon, il suffit de faire le rapport des aires:



Résumé

- Loi uniforme sur un rectangle
- Indépendance et lois marginales
- Exemples de calcul

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca