Loi uniforme sur un disque

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

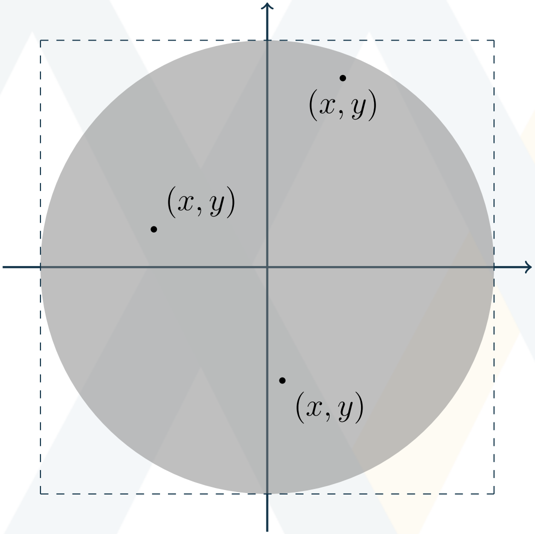
Considérons (X, Y) un couple de variables aléatoires uniformément réparties dans le disque unité.

Chaque réalisation de (X, Y) représente les coordonnées cartésiennes d'un point dans le disque unité.

Est-ce que le *choix* des coordonnées se fait de façon indépendante?

Et qu'arrive-t-il si l'on passe en coordonnées polaires?

Loi uniforme sur le disque unité



Loi uniforme sur le disque unité

La fonction de densité conjointe est donc

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut aussi écrire

Lois marginales

Par symétrie de la loi, X et Y auront la même loi marginale.

En effet, si l'on utilise

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_{(-1,1)}(y)\mathbb{1}_{\left(-\sqrt{1-y^2},\sqrt{1-y^2}\right)}(x),$$

alors on obtient

Loi du rayon aléatoire

Considérons maintenant le rayon aléatoire, c'est-à-dire la variable aléatoire

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Sa loi de probabilité est donnée par

Loi de l'angle aléatoire

Considérons maintenant l'angle aléatoire, c'est-à-dire la variable aléatoire

$$\Theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Sa loi de probabilité est

Coordonnées polaires

Cherchons maintenant la loi conjointe du couple (R, Θ), définie par

$$(R, \Theta) = \left(\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan\left(Y/X\right) \right).$$

Comme la transformation est inversible, on peut aussi écrire:

$$\begin{cases} X &= R\cos(\Theta) \\ Y &= R\sin(\Theta). \end{cases}$$

Transformation inverse

La transformation inverse étant donnée par

$$(x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

sa matrice jacobienne et son jacobien sont:

Loi conjointe du rayon et de l'angle

On en déduit donc que:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,|\det J(r,\theta)|\,\mathbb{1}_{(0,1)}(r)\mathbb{1}_{(0,2\pi)}(\theta)$$

Résumé

- Loi uniforme sur le disque
- Lois marginales
- Loi du rayon aléatoire
- Loi de l’angle aléatoire
- Coordonnées polaires
- Loi conjointe du rayon et de l’angle

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Mathéma-TIC

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC