Loi d'une transformation d'une variable aléatoire continue

Théorème

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Il arrive souvent que l'on connaisse la loi d'une variable aléatoire X et que l'on veuille obtenir celle d'une autre variable aléatoire de la forme $Y = g(X)$.

Nous allons voir un résultat permettant justement d'obtenir directement la densité de $Y = g(X)$ lorsque X est une variable aléatoire continue et que la fonction g est *suffisamment régulière*.

Nous verrons que la méthodologie de la preuve est possiblement plus importante que le résultat lui-même.

Quelques rappels

Une fonction g est dite strictement croissante si

$$u < v \Longrightarrow g(u) < g(v),$$

et strictement décroissante si

$$u < v \Longrightarrow g(u) > g(v).$$

Si g est strictement monotone (croissante ou décroissante), alors elle admet une fonction inverse g^{-1}.

Notons que si g est strictement croissante (resp. décroissante), alors g^{-1} est aussi strictement croissante (resp. décroissante).

Théorème

Transformation d'une variable aléatoire continue

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par f_X. Si g est une fonction strictement monotone (croissante ou décroissante) et dérivable, alors la densité de la variable aléatoire $Y = g(X)$ est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right| & \text{s'il existe } x \text{ tel que } y = g(x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où g^{-1} est la fonction inverse de g.

La preuve de ce théorème est très *instructive*.

Preuve du théorème

Supposons que g est strictement croissante.

Preuve du théorème

Supposons que g est strictement décroissante.

Résumé

- Conditions suffisantes afin d'obtenir la densité de $Y = g(X)$ lorsque X est une v.a. continue
- Méthodologie aussi importante que le résultat

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Mathéma-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Gabriel Prince

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC