

# Loi d'une transformation d'une variable aléatoire continue

Deux exemples avec la loi uniforme

**Jean-François Renaud**

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

## Introduction

Nous allons considérer deux exemples où l'on cherche à obtenir la densité de  $Y = g(X)$  lorsque  $X$  suit une loi uniforme.

Plus particulièrement, considérons les deux exemples suivants:

- $Y = e^X$  si  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ ,
- $Y = X^2$  si  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ .

Rappelons que si la transformation  $g$  est *suffisamment régulière*, il existe un théorème nous permettant d'obtenir la densité de  $Y$  directement.

## Théorème

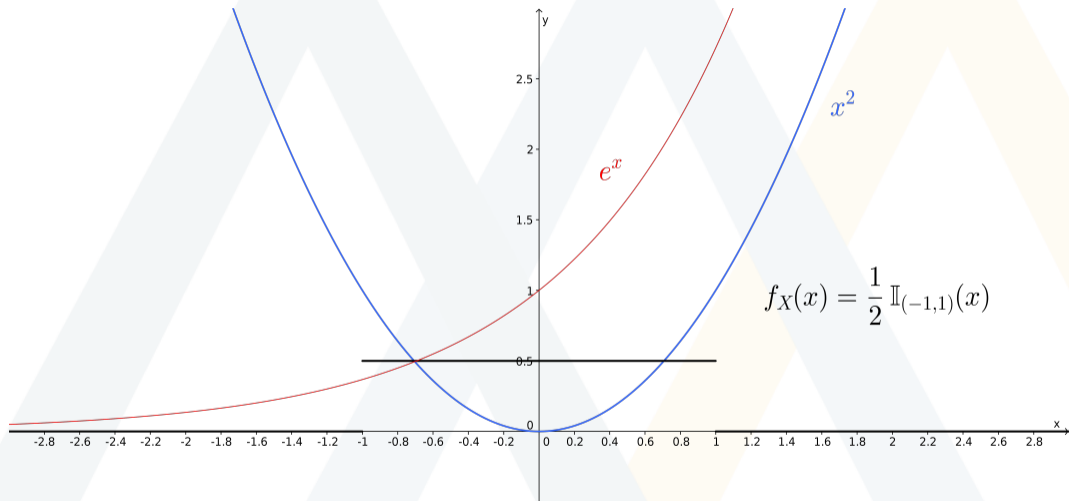
### Transformation d'une variable aléatoire continue

Soit  $X$  une variable aléatoire continue dont la densité est donnée par  $f_X$ . Si  $g$  est une fonction strictement monotone (croissante ou décroissante) et dérivable, alors la densité de la variable aléatoire  $Y = g(X)$  est donnée par

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy}g^{-1}(y) \right| & \text{s'il existe } x \text{ tel que } y = g(x), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où  $g^{-1}$  est la fonction inverse de  $g$ .

# Représentation graphique



## Exemple 1

On cherche à obtenir la densité de  $Y = e^X$  sachant que  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ .

## Exemple 2

On cherche maintenant à obtenir la densité de  $Y = X^2$  sachant toujours que  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ .

## Exemple 2

En résumé, si  $Y = X^2$  avec  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$ , alors

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq 0, \\ \sqrt{y}, & \text{si } y \in (0, 1), \\ 1 & \text{si } y \geq 1, \end{cases}$$

et donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{I}_{(0,1)}(y).$$

# Résumé

- Exemple 1:  $Y = e^X$  si  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$
- Exemple 2:  $Y = X^2$  si  $X \sim \text{unif}(-1, 1)$

Conception du contenu

**Jean-François Renaud**

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

**Clarence Simard**

Révision du contenu

**Samuel Bernard**

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet  
**Samuel Bernard**  
**Bruno Poellhuber**

Postproduction  
**Symon Nestoruk**

Musique  
**Sébastien Belleudy**  
[sebe.bandcamp.com](http://sebe.bandcamp.com)

Conception graphique  
**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX  
**Nicolas Beauchemin**  
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**



**Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence**

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

**Mathema-TIC.ca**