# Loi Pareto

**Jean-François Renaud**

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

# Introduction

La loi Pareto doit son nom à l'économiste italien Vilfredo Pareto.

À l'époque, Pareto avait utilisé cette loi de puissance afin de modéliser la distribution des revenus, ce qui donna naissance à la *règle du 80-20*.

Elle est utilisée en réassurance afin de modéliser la valeur des sinistres.

Au menu de cette capsule vidéo:

- définition à partir de sa fonction de répartition;
- obtention de la fonction de densité;
- calcul de la moyenne et de la variance.

# Définition à partir de la fonction de répartition

## Loi Pareto

On dira que $X$ suit une loi Pareto de paramètres $\alpha$ et $\beta$, où $\alpha, \beta > 0$, que l'on écrit sous la forme

$$X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta),$$

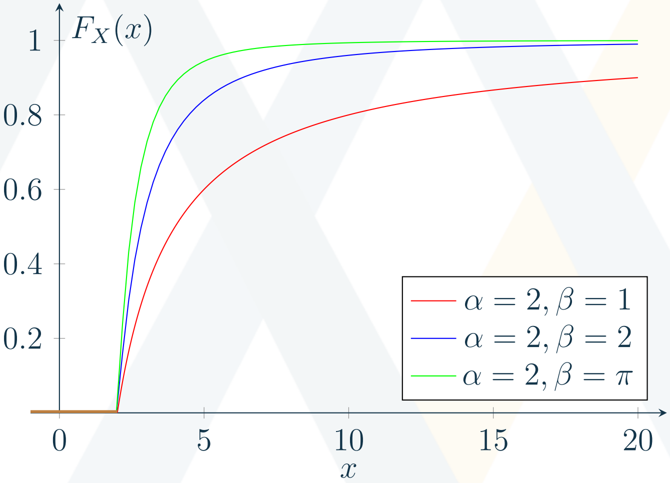
si sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta} & \text{si } x > \alpha, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, si $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$, alors $X > \alpha$.

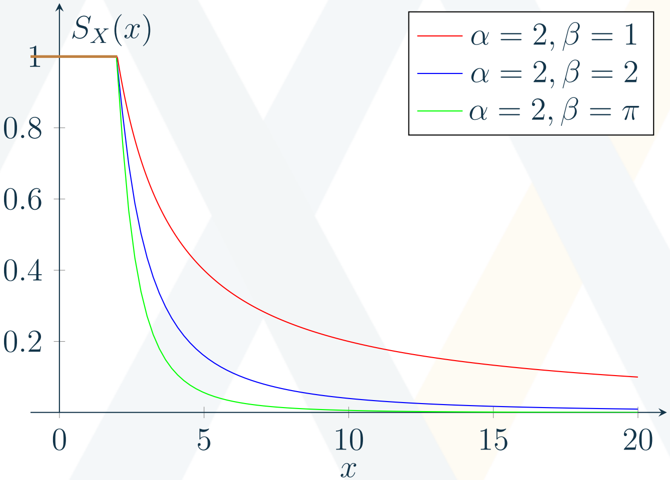
# Graphes de la fonction de répartition

$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta$, si $x > \alpha$



# Graphes de la fonction de survie

$S_X(x) = \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}$, si $x > \alpha$

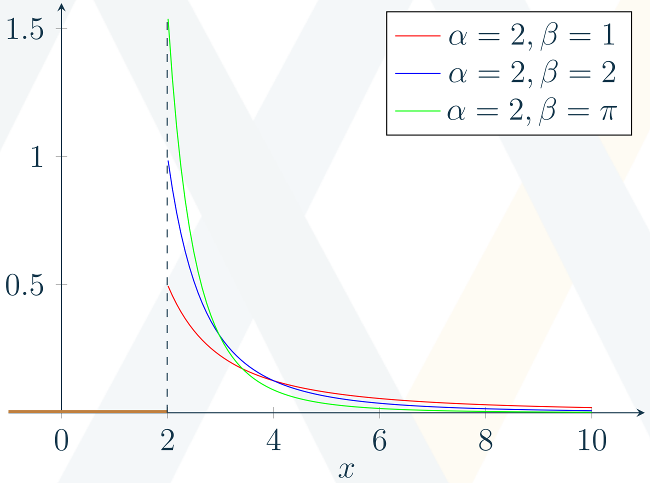


# Fonction de densité

Si $X \sim \mathrm{Pareto}(\alpha, \beta)$, c'est-à-dire si $F_X(x) = 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}$ pour $x > \alpha$, alors

# Graphes de la fonction de densité

$f_X(x) = \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}$, si $x > \alpha$



# Espérance et variance

Si $X \sim \text{Pareto}(\alpha, \beta)$, alors

- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha\beta}{\beta-1}$, si $\beta > 1$
- $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha^2\beta}{\beta-2}$, si $\beta > 2$
- $\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{\alpha^2\beta}{(\beta-1)^2(\beta-2)}$, si $\beta > 2$

# Résumé

- Définition de la loi Pareto
- Obtention de la fonction de densité
- Calcul de la moyenne et de la variance

Conception du contenu

**Jean-François Renaud**
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

**Clarence Simard**

Révision du contenu

**Samuel Bernard**
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**

Postproduction

**Symon Nestoruk**

Musique

**Sébastien Belleudy**

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

**Samuel Bernard** **Bruno Poellhuber**

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Université de Montréal

Mathéma-TIC