Loi normale bivariée

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

La loi normale bivariée est l'une des lois de probabilité bivariées les plus importantes.

Nous allons extraire quelques propriétés de la fonction de densité conjointe:

- lois marginales;
- lois conditionnelles;
- corrélation.

Fonction de densité conjointe

Loi normale bivariée

Un vecteur aléatoire (X, Y) suit une loi normale bivariée si sa fonction de densité conjointe est donnée par

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}$$
$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 \right.\right.$$
$$\left.\left. -2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\},$$

pour tout $-\infty < x, y < \infty$, où $-\infty < \mu_X, \mu_Y < \infty$, $\sigma_X, \sigma_Y > 0$ et $-1 < \rho_{XY} < 1$.

Définition

Lorsque (X,Y) suit une loi normale bivariée, on écrira

$$(X,Y) \sim \mathcal{N}(\mu_X, \mu_Y, \sigma_X, \sigma_Y, \rho_{XY}).$$

On vérifiera (de façon un peu indirecte) qu'il s'agit d'une fonction de densité.

Attention: si X et Y suivent chacune une loi normale univariée, alors le couple (X,Y) ne suit pas nécessairement une loi normale bivariée.

Complétion du carré

Notons tout d'abord que

$$a^2 - (2c)ab + b^2 = (a - cb)^2 + (1 - c^2)b^2.$$

Conséquemment,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \\
&\qquad = \left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right) - \rho_{XY}\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right)^2 + (1-\rho_{XY}^2)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2.
\end{aligned}$$

Nouvelle expression pour la densité conjointe

Ainsi, on peut écrire

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x;y)h(y),$$

où, pour chaque valeur de y fixée, la fonction $x \mapsto g(x;y)$ est la densité d'une loi normale de moyenne

$$\mu_X + \rho_{XY}\sigma_X \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right)$$

et de variance

$$\left(1 - \rho_{XY}^2\right) \sigma_X^2,$$

alors que h est la densité d'une loi normale de moyenne μ_Y et variance σ_Y^2.

Lois marginales

Et donc nécessairement, si on fixe la valeur de y,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x =$$

En d'autres mots, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Et, par symétrie, on obtiendra aussi que $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$.

Lois conditionnelles

On peut également déduire que $g(x;y)$ est la fonction de densité conditionnelle de X étant donné $Y=y$, car

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y).$$

Et donc,

$$X \mid Y = y \sim \mathcal{N}\left(\mu_X + \rho_{XY}\sigma_X\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right), (1-\rho_{XY}^2)\sigma_X^2\right).$$

Corrélation

Par définition,

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}(X,Y) = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right].$$

On peut donc écrire

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Corrélation

Puisque

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y),$$

on a

$$\mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Indépendance

Rappelons que $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

On voit que

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{XY}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho_{XY}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right]\right\} = f_X(x)f_Y(y),$$

si et seulement si $\rho_{XY} = 0$.

Indépendance

En d'autres mots, $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ si et seulement si $\rho_{XY} = 0$.

Ce dernier résultat n'est évidemment pas vrai en général.

On peut aussi en déduire que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et de lois normales, alors (X, Y) suit une loi normale bivariée.

Résumé

Nous avons montré que si (X, Y) suit une loi normale bivariée, alors:

- les lois marginales sont normales;
- les lois conditionnelles sont normales;
- $X \perp\!\!\!\perp Y \iff \mathbb{C}\mathrm{orr}(X, Y) = 0.$

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Mathéma-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Mathéma-TIC

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Bruno Poellhuber

Université de Montréal

Mathéma-TIC