

Loi binomiale négative

Calcul des moments

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

L'objectif de cette capsule vidéo est de calculer les moments de tout ordre d'une variable aléatoire de loi binomiale négative.

Rappelons qu'une variable aléatoire discrète X suit une loi binomiale négative de paramètres r et p , ce que l'on représente aussi par

$$X \sim \text{BinNeg}(r, p),$$

si sa fonction de masse est donnée par

$$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r},$$

pour chaque $n = r, r+1, r+2, \dots$

Calcul du k^{e} moment

Fixons un entier $k \geq 1$. On veut calculer

$$\mathbb{E} [X^k] = \sum_{n=r}^{\infty} n^k \mathbb{P} (X = n) = \sum_{n=r}^{\infty} n^k \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

Formule réursive

On a donc obtenu le résultat suivant:

Moments de la loi binomiale négative

Si $X \sim \text{BinNeg}(r, p)$ et si $k \geq 1$ est un entier, alors

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{r}{p} \mathbb{E}[(Y - 1)^{k-1}],$$

où $Y \sim \text{BinNeg}(r + 1, p)$.

En particulier, $\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p}$ et donc

$$\mathbb{E}[X^2] =$$

Espérance et variance

Puisque

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 =$$

Espérance et variance de la loi binomiale négative

Si $X \sim \text{BinNeg}(r, p)$, alors

$$\mathbb{E}[X] = \frac{r}{p} \quad \text{et} \quad \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Résumé

- Fonction de masse de la loi binomiale négative
- Formule récursive pour les moments
- Espérance et variance

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



 **Mathéma-TIC**



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca