

Formule de Bayes

Exemples

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Il arrive qu'une probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(F | E)$ soit difficile à calculer alors que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(E | F)$ est beaucoup plus facile à calculer.

La formule de Bayes permet justement d'exprimer une telle probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(F | E)$ en fonction de probabilités conditionnelles *renversées*.

Il s'agit d'un outil très utile.

Rappels

Formule de Bayes

Si E et F sont des événements tels que $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F | E) &= \frac{\mathbb{P}(E | F) \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E | F) \mathbb{P}(F)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E | F_i) \mathbb{P}(F_i)}\end{aligned}$$

où $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est une partition.

Exemple 1

Soit deux urnes A et B . L'urne A contient 10 balles numérotées de 1 à 10 alors que l'urne B contient 5 balles numérotées de 1 à 5.



On effectue l'expérience suivante: on choisit au hasard et à l'aveugle une urne et l'on y pige (avec remise) des balles.

On ne saura pas quelle urne a été choisie et on pigera toujours dans cette urne.

Exemple 1

Si, au premier tirage, on observe un 7, alors la probabilité *a posteriori* que l'on soit en train de piger dans l'urne A est clairement égale à 1.

Par contre, si on pige un 3 au premier tirage, la situation est différente.

Exemple 1

Supposons maintenant que, après deux tirages, on ait observé un 3 et un 5.

Quelle est alors la probabilité *a posteriori* que les balles proviennent de l'urne A ?

Exemple 2

Dans un groupe de polices d'assurance auto, supposons qu'il y ait deux types de conducteurs: les conducteurs dits *prudents* et les conducteurs dits *téméraires*.

Il est bien connu que $4/5$ des conducteurs sont de type *prudent*.

La compagnie d'assurance sait également qu'un conducteur *prudent* effectuera une réclamation dans la prochaine année avec une faible probabilité de $1/20$ alors que, pour un conducteur *téméraire*, cette probabilité est plutôt de $1/5$.



Un nouveau client souscrit à une police d'assurance auto avec cette compagnie. Évidemment, la compagnie ne peut pas savoir de quel type de conducteur il s'agit.

Exemple 2

Si, à la fin de l'année, ce nouvel assuré n'a toujours pas fait de réclamation, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un conducteur *téméraire*?

Résumé

- Rappel de la formule de Bayes
- Exemples

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca