

# Formule de Bayes

## Énoncé et démonstration

**Jean-François Renaud**

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC  
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)  
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

## Introduction

Il arrive qu'une probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(F | E)$  soit difficile à calculer alors que la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(E | F)$  est beaucoup plus facile à calculer.

La formule de Bayes, nommée en l'honneur de Thomas Bayes, permet justement d'exprimer une telle probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(F | E)$  en fonction de probabilités conditionnelles *renversées*.

Malgré sa simplicité, il s'agit d'un outil très utile!

Cette formule est à la base de la *statistique bayésienne* et de la *théorie de la crédibilité*.

Dans cette capsule vidéo, nous allons présenter cette formule ainsi que sa démonstration.



## Rappels

### Formule des probabilités totales

Si  $E$  est un événement et si  $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une partition, alors

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E \mid F_i) \mathbb{P}(F_i),$$

en autant que  $\mathbb{P}(F_i) > 0$  pour chaque  $i = 1, 2, \dots, n$ .

En particulier, rappelons que

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \mid F) \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(E \mid F^c) \mathbb{P}(F^c).$$

# Formule de Bayes

## Théorème

Si  $E$  et  $F$  sont des événements tels que  $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$ , alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F | E) &= \frac{\mathbb{P}(E | F) \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(E | F) \mathbb{P}(F)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E | F_i) \mathbb{P}(F_i)}\end{aligned}$$

où  $\{F_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est une partition telle que  $\mathbb{P}(F_i) > 0$  pour chaque  $i = 1, 2, \dots, n$ .

# Démonstration

# Résumé

- Rappel de la formule des probabilités totales
- Formule de Bayes
- Démonstration

Conception du contenu

**Jean-François Renaud**

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

**Clarence Simard**

Révision du contenu

**Samuel Bernard**

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet  
**Samuel Bernard**  
**Bruno Poellhuber**

Postproduction  
**Symon Nestoruk**

Musique  
**Sébastien Belleudy**  
[sebe.bandcamp.com](http://sebe.bandcamp.com)

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

[nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca](mailto:nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca)

Production

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**



 **Mathéma-TIC**



**Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence**

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

**Mathema-TIC.ca**