Fonctions de densité conditionnelles

Exemples

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction et rappels

L'objectif de cette capsule vidéo est d'illustrer, avec deux exemples, les liens qui unissent une fonction de densité conditionnelle avec les fonctions de densité conjointes et marginales correspondantes.

Rappelons que si le couple de variables aléatoires (X, Y) est distribué selon la fonction de densité conjointe $f_{X,Y}$, alors la fonction de densité conditionnelle de $X \mid Y = y$ est donnée par

$$x \mapsto f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

pour toute valeur de y telle que $f_Y(y) > 0$.

On en déduit que $f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)$.

Il y a des résultats semblables pour la densité conditionnelle de $Y \mid X = x$.

Exemple 1

Considérons tout d'abord la fonction de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De façon équivalente, on peut écrire

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\mathrm{e}^{-(x+y)} \mathbb{1}_{(0,y)}(x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

ou bien

$$f_{X,Y}(x,y) = 2\mathrm{e}^{-(x+y)} \mathbb{1}_{(x,\infty)}(y) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Exemple 1

Trouvons la loi marginale de X :

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{x}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathrm{d}y \end{aligned}$$

De façon similaire, on obtient $f_Y(y) = 2\mathrm{e}^{-y}\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$.

Exemple 1

Et dans ce cas, la densité conditionnelle de $Y \mid X = x$ prend la forme

$$
\begin{aligned}
y \mapsto f_{Y|X}(y \mid x) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \\
&= \frac{2\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathbb{1}_{(x,\infty)}(y)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)}{2\mathrm{e}^{-2x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)}
\end{aligned}
$$

La loi de $Y \mid X = x$ est donc, en quelque sorte, une loi exponentielle sur (x, ∞).

Exemple 1

Maintenant, pour la densité conditionnelle de $X \mid Y = y$, on obtient

$$x \mapsto f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$
$$= \frac{2\mathrm{e}^{-(x+y)}\mathbb{1}_{(0,y)}(x)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)}{2\mathrm{e}^{-y}\left(1-\mathrm{e}^{-y}\right)\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)}$$

La loi de $X \mid Y = y$ est donc, en quelque sorte, une loi exponentielle sur $(0, y)$.

Exemple 2

Considérons maintenant la fonction de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{y} & \text{si } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De façon équivalente, on peut écrire

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{e^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0,y)}(x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

on en déduit donc que

$$X \mid Y = y \sim \text{unif}(0,y) \quad \text{et} \quad Y \sim \exp(1).$$

Exemple 2

Malheureusement, dans ce cas-ci, la fonction de densité marginale de X n'a pas de forme explicite:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y$$

Il devient donc quasiment inévitable de passer par la loi de $X \mid Y = y$ si l'on cherche à calculer des probabilités faisant intervenir la loi marginale de X.

Résumé

- Rappels
- Exemple 1
- Exemple 2

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Mathéma-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard **Bruno Poellhuber**

CÉGEP RÉGIONAL *de* LANAUDIÈRE *à* Terrebonne

Université de Montréal

Mathéma-TIC