

Fonction indicatrice

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Ce que l'on appelle *fonction indicatrice* représente en fait un type de fonction.

Il s'agit d'un outil permettant d'écrire d'autres fonctions sous une forme plus compacte et tenant sur une seule ligne.

Une fonction indicatrice est une fonction paramétrée par un sous-ensemble de nombres réels, disons A , et qui ne peut prendre que deux valeurs: la valeur 1 si la variable de la fonction est élément de A , et la valeur 0 sinon.

Définition et notation

Mathématiquement, pour un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ fixé, on définit la fonction

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_A: \mathbb{R} &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \mathbb{1}_A(x),\end{aligned}$$

par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

D'autres symboles sont utilisés afin de représenter ce type de fonction:

$$\mathbf{1}_A, \quad \mathbb{I}_A, \quad \mathbf{I}_A, \quad I_A, \quad \chi_A, \quad \text{etc.}$$

Encore de la notation

On écrira de façon équivalente

$$\mathbb{1}_A(x) \quad \text{ou} \quad \mathbb{1}_{\{x \in A\}}$$

lorsque l'on évalue la fonction au point x .

Par exemple, si $A = (a, b]$, alors

$$\mathbb{1}_{(a,b]}(x) = \mathbb{1}_{\{x \in (a,b]\}} = \mathbb{1}_{\{a < x \leq b\}}.$$

Il est intéressant de noter que $\mathbb{1}_{(-\infty, \infty)} \equiv 1$, c'est-à-dire que

$$\mathbb{1}_{(-\infty, \infty)}(x) = 1, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1

Par exemple, considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En utilisant une fonction indicatrice, on peut écrire

$$f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \quad \text{ou} \quad f(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{[0, \infty)}(x),$$

en tout point x .

Exemple 2

Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1, \\ \frac{x+1}{4} & \text{si } -1 < x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

En utilisant deux fonctions indicatrices, on peut écrire

$$f(x) = \frac{x+1}{4} \mathbb{1}_{\{-1 < x < 3\}} + \mathbb{1}_{\{x \geq 3\}},$$

en tout point x .

Quelques propriétés

En terminant, voici quelques propriétés.

Pour deux ensembles A et B :

- $\mathbb{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$;
- $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \mathbb{1}_B(x)$;
- $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$.

Résumé

- Définition d'une fonction indicatrice
- Notation
- Exemple 1
- Exemple 2
- Quelques propriétés

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique
Christine Blais

Production des modèles en LaTeX
Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca