

Fonction de densité conjointe et couple de variables aléatoires continues

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Une fonction de densité à deux variables est une façon de *stocker* l'information d'une loi de probabilité, typiquement associée à un couple de variables aléatoires (X, Y) , dont les valeurs possibles forment un *continuum*, par exemple un rectangle du plan.

Plus précisément, une telle fonction de densité nous permettra de représenter la fonction de répartition de (X, Y) sous la forme d'une intégrale double.

Nous verrons ensuite comment utiliser cette fonction pour des calculs de probabilités de la forme $\mathbb{P}(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ et son lien avec les fonctions de densité marginales de X et Y .

Définition

Fonction de densité conjointe

On dit que $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de densité conjointe si:

- elle est positive, c'est-à-dire $f(x, y) \geq 0$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;
- elle *intègre* à 1, c'est-à-dire

$$\iint f(x, y) dx dy = 1.$$

Nous allons maintenant voir comment associer une loi de probabilité à une fonction de densité conjointe f .

Définition

Couple de variables aléatoires continues

Un couple de variables aléatoires (X, Y) est dit (conjointement) continu si sa fonction de répartition $F_{X,Y}(a, b) = \mathbb{P}\{X \leq a, Y \leq b\}$ peut s'écrire sous la forme

$$F_{X,Y}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(u, v) dv du,$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, où $f_{X,Y}$ est une fonction de densité conjointe.

La fonction de densité $f_{X,Y}$ caractérise la loi du vecteur aléatoire (X, Y) en représentant la *distribution* de la masse de probabilité dans le plan.

Remarques

On appelle *valeurs possibles* du couple (X, Y) l'ensemble des points (a, b) tels que

$$f_{X,Y}(a, b) > 0.$$

Comme dans le cas unidimensionnel, puisque

$$F_{X,Y}(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(u, v) dv du,$$

on a que

$$\frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(a, b) = f_{X,Y}(a, b).$$

Conséquences de la définition

Puisque

$$\mathbb{P}\{X \leq a, Y \leq b\} = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(u, v) dv du,$$

on en déduit que:

- $\mathbb{P}\{X > a, Y \leq b\} = \int_a^{\infty} \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(u, v) dv du;$
- $\mathbb{P}\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\} = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(u, v) dv du.$

Il est intéressant de remarquer que les événements précédents peuvent aussi s'écrire sous la forme:

$$\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\} = \{X \in [a, b], Y \in [c, d]\} = \{(X, Y) \in [a, b] \times [c, d]\}.$$

Conséquences de la définition

Des dernières relations, on peut déduire que

$$\mathbb{P} \{(X, Y) \in A \times B\} = \mathbb{P} \{X \in A, Y \in B\} = \int_A \int_B f_{X,Y}(x, y) dy dx,$$

où $A, B \subseteq \mathbb{R}$, et plus généralement

$$\mathbb{P} \{(X, Y) \in D\} = \iint_D f_{X,Y}(x, y) dx dy,$$

où $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Fonctions de densité marginales

Rappelons qu'il est toujours possible d'écrire

$$F_X(x) =$$

Et donc

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v) dv,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

De la même manière, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, y) du$, pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Résumé

- Fonction de densité conjointe
- Couple de variables aléatoires continues
- Conséquences de la définition
- Fonctions de densité marginales

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique
Christine Blais

Production des modèles en LaTeX
Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca