# Covariance et corrélation

## Définitions et propriétés

**Jean-François Renaud**

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l’Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d’arrimage universités-collèges

# Introduction

Nous savons que deux variables aléatoires $X$ et $Y$ sont soit indépendantes (entre elles) ou bien elles ne le sont pas.

Lorsqu'elles sont *liées* l'une à l'autre, nous aimerions quantifier cette relation.

La covariance est une mesure de la relation *linéaire* entre deux variables aléatoires.

La corrélation est une normalisation de la covariance.

Dans cette capsule vidéo, nous nous proposons d'étudier la covariance et la corrélation, leurs propriétés ainsi que leurs liens avec l'indépendance.

# Définition

## Covariance

On définit la covariance entre $X$ et $Y$ par:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X, Y\right) = \mathbb{E}\left[\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right],$$

où $\mu_X$ est l'espérance de $X$ et $\mu_Y$ celle de $Y$.

Il s'agit donc d'une généralisation de la variance:

Remarque: $\mathbb{C}\mathrm{ov}\left(X, Y\right) = \mathbb{E}\left[XY\right] - \mathbb{E}\left[X\right]\mathbb{E}\left[Y\right].$

# Propriétés de la covariance

La covariance possède aussi les propriétés suivantes:

- symétrie:
- bilinéarité:

On en déduit que

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\,(aX + bY) =$$

## Définition

Le signe de la covariance nous donne une indication du lien entre $X$ et $Y$.

On peut montrer que

$$-\sigma_X \sigma_Y \leq \mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X, Y) \leq \sigma_X \sigma_Y,$$

où $\sigma_X$ est l'écart-type de $X$ et $\sigma_Y$ celui de $Y$.

## Corrélation

On définit donc la corrélation entre $X$ et $Y$ par

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}\,(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

et on en déduit ensuite que $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$.

# Covariance, corrélation et indépendance

Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \rho_{X,Y} = 0$:

Par contre, si $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y) = \rho_{X,Y} = 0$, alors on ne peut conclure que les variables aléatoires sont indépendantes:

# Relation linéaire

La covariance et la corrélation sont des mesures de la relation *linéaire*.

Si $Y = aX + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, alors:

# Résumé

- Définition de la covariance
- Propriétés de la covariance
- Définition de la corrélation
- Lien avec l'indépendance
- Relation linéaire

Conception du contenu

**Jean-François Renaud**
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

**Clarence Simard**

Révision du contenu

**Samuel Bernard**
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

MathémaTIC

Direction de projet

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**

Postproduction

**Symon Nestoruk**

Musique

**Sébastien Belleudy**

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

**Samuel Bernard**

CÉGEP RÉGIONAL *de* LANAUDIÈRE *à* Terrebonne

**Bruno Poellhuber**

Université de Montréal

Mathéma-TIC