Densité de la loi normale

Preuve

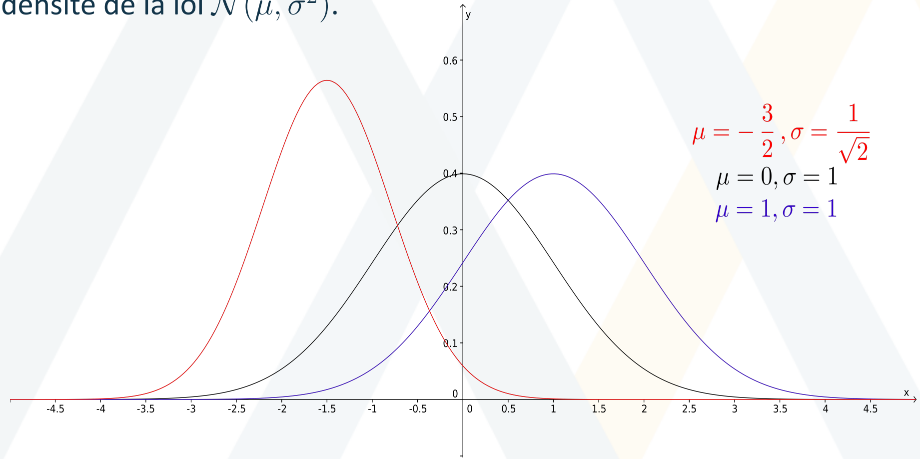
Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Pour des valeurs fixées de μ et σ, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est la fonction de densité de la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



Cas particulier: loi normale centrée réduite

Nous allons commencer par montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = 1,$$

ou, de façon équivalente, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

La difficulté: la primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ *n'existe pas*, c'est-à-dire qu'elle ne peut être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires.

Il nous faudra donc faire preuve d'ingéniosité!

Première étape: une astuce

Définissons

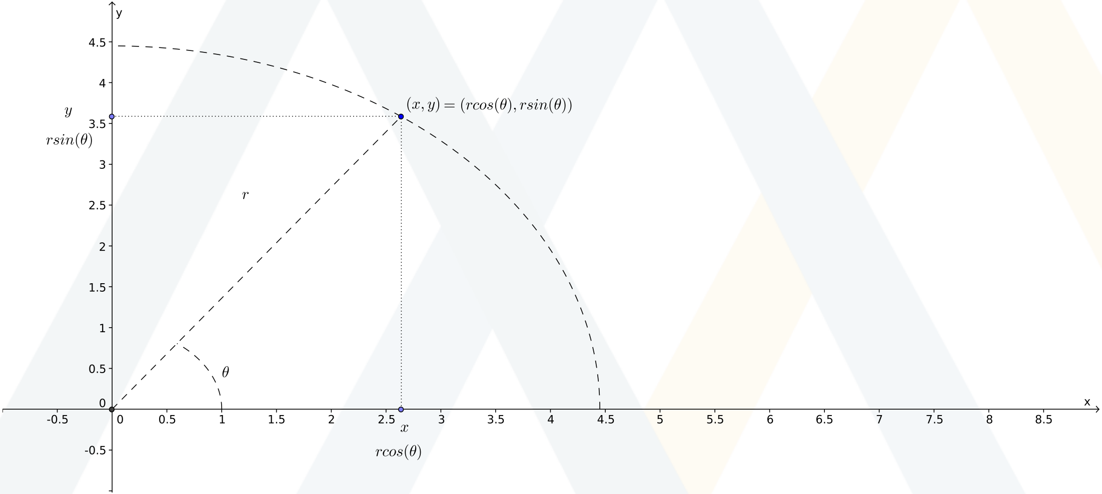
$$\mathrm{I} := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

et tentons de calculer la valeur de I^2.

On obtient donc

Deuxième étape: un changement de variable

Chaque point (x, y) peut aussi être représenté par un rayon r et un angle θ:



Deuxième étape: un changement de variable

Si on effectue le changement de variables en coordonnées polaires

$$(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{I}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \end{aligned}$$

Troisième étape: calcul de l'intégrale

Il ne reste plus qu’à calculer

$$\mathrm{I}^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}} r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r.$$

Fin de la preuve

On a donc obtenu

$$\mathrm{I}^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^2 = 2\pi.$$

Donc, puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \geq 0$, on en déduit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

Cas général

Dans le cas général, il faut montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = 1.$$

Il est possible de se ramener à la densité de la loi normale centrée réduite en effectuant le changement de variable $y = \frac{(x-\mu)}{\sigma}$:

Résumé

Nous avons vérifié que

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = 1$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = 1$

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Mathéma-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Mathéma-TIC

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard **Bruno Poellhuber**

CÉGEP RÉGIONAL *de* LANAUDIÈRE *à* Terrebonne

Université de Montréal

Mathéma-TIC