Espérance conditionnelle

Exemples

Jean-François Renaud

Professeur
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC
Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS) du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

Nous savons que la variable aléatoire $\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]$ est la *meilleure approximation* de X que l'on peut construire à partir de l'information fournie par Y.

Nous savons aussi que

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]\right].$$

Dans cette capsule vidéo, nous nous proposons d'étudier deux exemples d'utilisation de cette propriété.

Exemple 1

Supposons que l'on veuille calculer l'espérance de X, sachant que le couple (X, Y) est distribué selon la fonction de densité conjointe

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{y} & \text{si } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \mathrm{d}x,$$

il serait naturel de vouloir identifier f_X et ensuite de calculer $\mathbb{E}[X]$.

Malheureusement, dans ce cas-ci, la fonction de densité marginale de X n'a pas de forme explicite.

Exemple 1

Par contre, puisque l'on peut aussi écrire

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y} \mathbb{1}_{(0,y)}(x) \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

on voit que, pour chaque valeur de $y > 0$ fixée,

$$X \mid Y = y \sim \mathrm{unif}(0, y)$$

et

$$Y \sim \exp(1).$$

Exemple 1

Ainsi, on obtient

Exemple 2

Supposons maintenant que la variable aléatoire N, prenant des valeurs entières positives, soit indépendante de la suite de variables aléatoires $X_1, X_2, X_3, \ldots$, indépendantes et identiquement distribuées.

On rappelle que la somme aléatoire des éléments d'une telle suite est donnée par:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

On rappelle également que, grâce à la formule des espérances itérées, nous avons que

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \mathbb{E}\left[N\right] \mathbb{E}\left[X_1\right].$$

Exemple 2

Calculons maintenant l'espérance du produit aléatoire des éléments de cette suite:

$$\prod_{i=1}^{N} X_i$$

Exemple 2

Si on a, par exemple, que $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$, alors

$$t \mapsto \mathbb{E}\left[t^N\right] = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$$

et donc

Exemple 2

Si on a plutôt que $N \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, alors

$$t \mapsto \mathbb{E}\left[t^N\right] = (pt + 1 - p)^n$$

et donc

Résumé

- Formule des espérances itérées
- Exemple 1
- Exemple 2

Mathéma-TIC

Conception du contenu

Jean-François Renaud
Université du Québec à Montréal (UQAM)
renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard
samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Mathéma-TIC

Direction de projet

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber

Postproduction

Symon Nestoruk

Musique

Sébastien Belleudy

sebe.bandcamp.com

Conception graphique

Christine Blais

Production des modèles en LaTeX

Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard **Bruno Poellhuber**

CÉGEP RÉGIONAL de LANAUDIÈRE à Terrebonne

Université de Montréal

Mathéma-TIC