

Continuité monotone de la mesure de probabilité

Énoncé et démonstration

Jean-François Renaud

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

Introduction

On dit qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si, pour chaque suite de nombres réels $(x_n)_{n \geq 1}$ convergente, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

C'est ce qu'on appelle la continuité par suites.

Il existe un résultat semblable pour la mesure de probabilité \mathbb{P} .

Dans cette capsule vidéo, nous allons présenter cette propriété de continuité ainsi que sa démonstration.

Notation

Nous dirons qu'une suite d'événements E_1, E_2, E_3, \dots est croissante si

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \dots$$

Dans ce cas, nous définirons un événement noté $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcup_{i \geq 1} E_i.$$

De la même manière, nous dirons que la suite E_1, E_2, E_3, \dots est décroissante si

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$$

Dans ce cas, nous définirons plutôt l'événement par $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n := \bigcap_{i \geq 1} E_i$.

Continuité monotone

Théorème

Si la suite d'événements E_1, E_2, E_3, \dots est croissante ou décroissante, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} E_n\right).$$

Démonstration

Supposons que la suite d'événements E_1, E_2, E_3, \dots est croissante.

Démonstration

On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcup_{i \geq 1} F_i$ et $E_n = \bigcup_{i=1}^n F_i$.

Résumé

- Continuité monotone de \mathbb{P}
- Démonstration

Conception du contenu

Jean-François Renaud

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

Clarence Simard

Révision du contenu

Samuel Bernard

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet
Samuel Bernard
Bruno Poellhuber

Postproduction
Symon Nestoruk

Musique
Sébastien Belleudy
sebe.bandcamp.com

Conception graphique
Christine Blais

Production des modèles en LaTeX
Nicolas Beauchemin
nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

Samuel Bernard

Bruno Poellhuber



Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

Mathema-TIC.ca