

# Additivité de la loi gamma

**Jean-François Renaud**

Professeur

Département de mathématiques

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca



Ressource développée dans le cadre du projet Mathéma-TIC

Financé par le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de la Science (MESRS)  
du Québec dans le cadre du Programme d'arrimage universités-collèges

## Introduction

La loi gamma, en plus d'être une généralisation des lois exponentielle et Erlang, est *stable* sous certains types d'opérations.

Par exemple, on sait déjà que si  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  et  $c > 0$ , alors

$$cX \sim \Gamma(\alpha, \beta/c).$$

L'objectif de cette capsule vidéo est de vérifier que la loi gamma possède la *propriété d'additivité*:

*la somme de variables aléatoires indépendantes et suivant des lois gamma suit elle aussi une loi gamma.*

# Théorème

## Additivité de la loi gamma

Pour  $n \geq 1$ , considérons des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  suivant des lois gamma:

$$X_i \sim \Gamma(\alpha_i, \beta),$$

pour chaque  $i = 1, 2, \dots, n$ . Si ces variables aléatoires sont indépendantes, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right).$$

## Rappel

Avant de commencer la preuve, rappelons que la loi gamma est caractérisée par sa fonction génératrice des moments (FGM).

### Caractérisation de la loi gamma

Une variable aléatoire  $X$  suit la loi  $\Gamma(\alpha, \beta)$  si et seulement si

$$\lambda \mapsto \mathbb{E} [e^{\lambda X}] = \left( \frac{\beta}{\beta - \lambda} \right)^\alpha,$$

où  $\lambda < \beta$ .

La preuve du théorème que nous sommes sur le point de présenter est basée sur cette propriété.

# Preuve basée sur la FGM

Fixons  $\lambda$  et calculons

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda \sum_{i=1}^n X_i} \right] =$$

# Résumé

- Propriété d'additivité de la loi gamma
- Preuve basée sur la FGM

Conception du contenu

**Jean-François Renaud**

Université du Québec à Montréal (UQAM)

renaud.jf@uqam.ca

**Clarence Simard**

Révision du contenu

**Samuel Bernard**

samuel.bernard@collanaud.qc.ca

Direction de projet  
**Samuel Bernard**  
**Bruno Poellhuber**

Postproduction  
**Symon Nestoruk**

Musique  
**Sébastien Belleudy**  
[sebe.bandcamp.com](http://sebe.bandcamp.com)

Conception graphique

**Christine Blais**

Production des modèles en LaTeX

**Nicolas Beauchemin**

nicolas.beauchemin@bdeb.qc.ca

Production

**Samuel Bernard**

**Bruno Poellhuber**



**Vidéo mise à disposition selon les termes de la licence**

Creative Commons internationale 4.0

Paternité / Pas d'utilisation commerciale / Partage dans les mêmes conditions

Les autorisations au-delà du champ de cette licence peuvent être obtenues à

**Mathema-TIC.ca**